**Решение задач с экономическим содержанием**

*Соломина Т.Г., методист МБУ «ЦРО»*

*Промышленновский МО*

В связи с введением в России экономики рыночной ориентации экономические знания стали необходимыми как в профессиональной сфере, так и в повседневной жизни. Сегодня жизнь настоятельно требует, чтобы выпускник имел развитое экономическое мышление и был готов к жизни в условиях рыночных отношений.

Эффективному постижению азов экономики поможет решение задач, в содержании которых идет речь о процентах. Решение многих задач школьного курса, нестандартных задач, практических задач помогает разобраться в новых экономических веяниях жизни. В течение последних нескольких лет в контрольно-измерительные материалы по математике ЕГЭ профильного уровня включены задачи с экономическим содержанием.

Для решения таких задач необходимо познакомиться с двумя математическими моделями, лежащими в основе наиболее распространенных **схем выплат по банковскому кредиту:**

**1 модель.**Выплаты кредита подбираются так, что **сумма долга уменьшается равномерно**. Это так называемая «схема с дифференцированными платежами».

**2 модель.**Выплаты кредита производятся **равными платежами**. Эта схема еще называется «аннуитет».

Но каждую из этих моделей можно разделить условно еще на несколько типов в зависимости от того, что известно и что нужно найти.

- Нахождение количества лет (месяцев) выплаты кредита.

- Вычисление процентной ставки по кредиту.

- Нахождение суммы кредита.

- Нахождение ежегодного (ежемесячного) транша.

- Задачи, связанные с известным остатком. (Фиксированные платежи)

- Задачи с нестандартным условием.

Задачи всех этих типов можно решать табличным способом. Этот способ удобен тем, что структура таблицы стабильна для любой задачи. Она состоит четырех столбиков:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Номер платежа | Долг до платежа | Платеж | Долг после платежа |

До решения задач выясним еще два вопроса:

1)Как записать начисление неизвестного количества процентов на сумму: сумма S, и на нее следует начислить r процентов?

S+ S S(1 + )

2) 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Например, была взята сумма S на 6 месяцев на таких условиях. Значит, каждый месяц долг уменьшается на S. После первого платежа остаток будет S, после второго S и т.д. И перед последним платежом до начисления процентов S.

А если неизвестно количество лет, то S после первого платежа, после второго, и перед последним .

Рассмотрим несколько задач.

**1)**Нахождение ежегодного платежа с равными , аннуитетными платежами

Банк выдает кредит на следующих условиях:

- 1 января каждого года на остаток долга начисляется 12,5%;

- выплата части долга происходит в январе каждого года равными суммами после начисления процентов.

Клиент планирует взять на этих условиях кредит 6,902 млн. рублей на 4 года. Какова будет сумма ежегодного платежа?

Для удобства сумму обозначим S.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № платежа | Долг до платежа | Платеж | Долг после платежа |
| 0(сумма  кредита) |  |  | S |
| 1 | 1,125 S | х | 1,125 S - х |
| 2 | (1,125 S – х)1,125 | х | (1,125 S – х)1,125 - х |
| 3 | ((1,125 S – х)1,125 – х)1,125 | х | ((1,125 S – х)1,125 – х)1,125 - х |
| 4 | (((1,125 S – х)1,125 – х)1,125 – х)1,125 | х | 0 |

По последней строке делаем вывод:

х = (((1,125 S – х)1,125 – х)1,125 – х)1,125

х = (( S - х – х)

х = ( S - х - х – х)

х = S - х

х = ∙ 6902000

х = 2296350

**2)** Нахождение процентной ставки с дифференцированными платежами.

15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; — 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Заполняем третий столбик. Т.к. 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца, то долг уменьшается на одну девятнадцатую всего кредита. Далее первый столбик, начисляем **r** процентов на данные третьего столбика. Далее платеж.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № платежа | Долг до платежа | Платеж | Долг после платежа |
| 0(сумма  кредита) |  |  | S |
| 1 | (1 + ) S | (1 + ) S - |  |
| 2 | (1 + ) S | (1 + ) S - |  |
| 3 | (1 + ) S | (1 + ) S - |  |
| … | … | … | … |
| 19 | (1 + ) S | (1 + ) S | 0 |

Учитывая, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит, составляем уравнение:

Sвыплат = 1,3Sпервонач.

(1 + ) S - S + (1 + ) S - S + (1 + ) S - S + …. +(1 + ) S = 1,3S

Раскрывая скобки, и группируя получаем:

S + S (1 + + + … + = 1,3S

В скобках сумма арифметической прогрессии. Она равна 10.

1 + ⋅ 10 = 1,3

r = 3

**3) Н**ахождение суммы кредита с фиксированным остатком.

В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на 4 года в размере S рублей, где S – это целое число. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнением с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Дата | Июль 2020 | Июль 2021 | Июль 2022 | Июль 2023 | Июль 2024 |
| Долг  (в млн. рублей) | S | 0,8S | 0,6S | 0,4S | 0 |

Найти наибольшее значение S, при котором общая сумма выплат будет меньше 50 млн. рублей.

В таблицу заносим сначала то, что известно. Таблица с остаточными платежами нам известна. Значит, заполняем третий столбик. Процент, который накручивает банк ежегодно, тоже известен, значит, первый столбик заполним. Тем самым заполняем два столбика. А третий заполняем на основе двух заполненных. Платеж – это разница между долгом до платежа и после платежа. Заполняем третий столбик.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Номер платежа | Долг до платежа | Платеж | Долг после платежа |
| 0 |  |  | *S* |
| 1 | 1,25S | 1,25S - *0,8S* | *0,8S* |
| 2 | 1,25∙0,8S | 1,25∙0,8S - *0,6S* | *0,6S* |
| 3 | 1,25∙0,6S | 1,25∙0,6S - *0,4S* | *0,4S* |
| 4 | 1,25∙0,4S | 1,25∙0,4S | *0* |

Т.к. общая сумма выплат должна быть меньше 50 млн. рублей, складываем все платежи и составляем неравенство:

1,25S - *0,8S +*1,25∙0,8S - *0,6S +* 1,25∙0,6S - *0,4S +* 1,25∙0,4S < 50

1,7S < 50

S < 29, 41….

Т.к. S по условию должно быть целым, то 29 млн.

**4)** Нахождение срока выплаты кредита.

В июле планируется взять кредит в банке на сумму 16 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:  
– каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;  
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;  
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.  
На сколько лет был взят кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения равнялась 40 млн. рублей?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № платежа | Долг до платежа | Платеж | Долг после платежа |
| 0(сумма  кредита) |  |  | 16 |
| 1 | 16 ∙ 1,25 | 16 ∙ 1,25 - ∙ 16 | ∙ 16 |
| 2 | ∙ 16 ∙ 1,25 | ∙ 16 ∙ 1,25 - ∙ 16 | ∙ 16 |
| 3 | ∙ 16∙ 1,25 | ∙ 16∙ 1,25 - ∙ 16 | ∙ 16 |
| … | … | … | … |
| *n* | ∙ 16∙ 1,25 | ∙ 16∙ 1,25 | 0 |

Т.к. общая сумма выплат после его погашения равнялась 40 млн рублей, составляем уравнение:

16 ∙ 1,25 - ∙ 16 + ∙ 16 ∙ 1,25 - ∙ 16+ ∙ 16 ∙ 1,25 - ∙ 16 + … +

∙ 16∙ 1,25 = 40

20 + ∙ (20 – 16) + (20 – 16) + …+ 40

4( = 20

4 ∙ сумма ар.прогрессии = 20

(*п –* 1) = 5

*п=* 11

**5)** Задача на вклады с равным пополнением.

Владимир поместил в банк 3600 тысяч рублей под 10% годовых. В конце каждого из первых двух лет хранения после начисления процентов он дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу третьего года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 48,5%. Какую сумму Владимир ежегодно добавлял к вкладу?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № пополнения | Вклад до пополнения | пополнение | Вклад после пополнения |
| 0(сумма  вклада) |  |  | 3600 |
| 1 | 3600 ∙ 1,1 | х | 3600 ∙ 1,1 + х = 3960 + х |
| 2 | (3960 + х) ∙ 1,1 | х | (3960 + х) ∙ 1,1 +х = 4356 + 2,1х |
| 3 | (4356 + 2,1х) ∙ 1,1 | х |  |

По условию последняя сумма больше первоначальной на 48,5%. Составляем уравнение:

S3 = 1,485 ∙ перв. вклад

(4356 + 2,1х) ∙ 1,1 = 3600 ∙ 1,485

х = 240

6)1 января 2015 года Андрей взял в банке 1,1 млн. рублей в кредит. Условия его возврата таковы:

- 1 числа каждого следующего месяца долг возрастает г на 3% по сравнению с концом предыдущего месяц.

- с 3 по 15 число каждого месяца Андрей должен выплатить часть долга в банк.

На какое минимальное количество месяцев Андрей может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 220 тыс. рублей?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Месяц | Долг до платежа | Платёж | Долг после платежа |
| 0(кредит) |  |  | 1100000 |
| 1 | 1100000•1,03=1133000 | 220000 | 913000 |
| 2 | 913000•1,03=940390 | 220000 | 720390 |
| 3 | 720390•1,03=74200,17 | 220000 | 522001,7 |
| 4 | 522001,7•1,03=537661,75 | 220000 | 317661,75 |
| 5 | 317661,75•1,03=327191,6 | 220000 | 107191,6 |
| 6 | 107191,6•1,03=110407,35 | 110407.35 | 0 |

Ответ: 6 месяцев.

Но если условие задачи немного усложнить, сделать платеж в интервале двух чисел, то уже без неравенства не обойтись.

7)1 марта 2010 года Аркадий взял в банке кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 1 марта каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Аркадий переводит в банк платеж. Весь долг Аркадий выплатил за 3 платежа, причем второй платеж оказался в два раза больше первого, а третий – в три раза больше первого. Сколько рублей взял в кредит Аркадий, если за три года он выплатил банку 2 395 800 рублей?

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № платежа | Долг до платежа | Платеж | Долг после платежа |
| 0(сумма  кредита) |  |  | S |
| 1 | 1,1S | х | 1,1S – х |
| 2 | (1,1S – х) ∙ 1,1 | 2х | (1,1S – х) ∙ 1,1 – 2х = 1,21S – 3,1х |
| 3 | (1,21S – 3,1х) ∙ 1,1 | 3х | 0 |

Учитывая, что все платежи составляют 2 395 800 рублей, находим х:

х + 2х + 3х = 2 395 800

х = 399300

Последний платеж 3х и он равен выражению (1,21S – 3,1х) ∙ 1,1

Составляем уравнение:

(1,21S – 3,1х) ∙ 1,1 = 3х

1,331S - 3,31 ∙ 399300 = 3 ∙ 399300

S = 1923000

Следующие две задачи отличаются формулировкой (с сайта Александра Ларина). Но опять же таблица помогает более наглядно представить ситуацию, алгоритмизировать решение задач.

8)В начале года 5/6 некоторой суммы денег вложили в банк А, а то, что осталось — в банк Б. Если вклад находится в банке с начала года, то к концу года он возрастает на определённый процент, величина которого зависит от банка. Известно, что к концу первого года сумма вкладов стала равна 670 у. е., к концу следующего — 749 у. е. Если первоначально 5/6 суммы было бы вложено в банк Б, а оставшуюся вложили бы в банк А, то по истечении одного года сумма выросла бы до 710 у. е. Определите сумму вкладов по истечении второго года в этом случае.

А)(1 + 0,01r) = *т*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № платежа | Вклад до пополнения | пополнение | Вклад после пополнения |
| 1 – ая ситуация | | | |
| 0(сумма  вклада) |  |  | S |
| 1 | S *т* |  | S *т* |
| 2 | S *т∙ т* |  | S *т2* |
| 2 – ая ситуация | | | |
|  |  |  | S |
| 1 | S *т* |  | S *т* |
| 2 | S *т∙ т* |  | S *т2* |

Б)(1 +0,01t) = *к*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № платежа | Вклад до пополнения | пополнение | Вклад после пополнения |
| 1 – ая ситуация | | | |
| 0(сумма  вклада) |  |  | S |
| 1 | S*к* |  | S*к* |
| 2 | S*к ∙ к* |  | S*к2* |
| 2 – ая ситуация | | | |
|  |  |  | S |
| 1 | S *к* |  | *к* |
| 2 | *∙ к∙ к* |  | *к2* |

Составляем уравнения:

S *т +* S*к =* 670,

S *т2+* S*к2 =* 749,

S *т + к =* 710.

А найти нужно  **S *т2 + к2***

Рассмотрим 1-ое и 3-е уравнения.

S *т +* S*к =* 670,

S *т + к =* 710.

Используя способ сложения, получаем: S*к* = 720

Подставляем в первое: S *т +* ∙ 720 = 670

Тогда *Sт =* 660

S*к* = 720

*Sт =* 660

Отсюда *т = к*

Подставляем во второе уравнение первоначальной системы:

S ∙ *к)2* + S*к2 =* 749,

S*к2 =* 864

S *т2 +*  ∙ 864 = 749

S *т2* = 726

А теперь подставляем это значение в искомое:

**S *т2 + к2 =* 726 *+*  864 = 841**

9)1 декабря 2014 года Арсений взял в банке 1 млн. рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга, затем Арсений переводит очередной транш. Арсентий выплатил кредит за два транша, переводя в первый раз 550 тыс. рублей, во второй – 638,4 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Арсению?

(1 + ) = р

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № платежа | Долг до платежа | Платеж | Долг после платежа |
| 0(сумма  кредита) |  |  | 1 |
| 1 | 1р | 0,55 | р – 0,55 |
| 2 | (р – 0,55)р | 0,6384 | 0 |

(р – 0,55)р – 0,6384 = 0

1000000р2 -550000р-638400=0

D = 285610000

р1 = 1,12

р2 = - 0,57

(1 + ) = 1,12

= 0,12

*r* = 12